

结构可靠性模糊设计

刘三¹, 姚另安²

(1. 广东工业大学 建设学院, 广东 广州 510643; 2. 广电房地产开发有限公司, 广东 广州 510656)

摘要: 结构可靠性设计中把材料性能、构件尺寸及外来因素作为随机变量, 而实际工程结构或构件安全工作的界限不但是随机的, 一般也是模糊的, 把它作为模糊随机事件来处理更为合理, 即进行模糊随机可靠度设计.

关键词: 随机; 模糊; 可靠度; 功能函数

中图分类号: N945. 17

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2004)01-0079-04

1 纯随机事件下结构可靠性设计

在传统的许用应力法设计中, 由于安全系数完全是凭经验确定, 安全系数也不是衡量结构安全性的统一尺度, 而且增大安全系数不一定就能按比例增加结构的安全度, 因此安全系数法设计不够科学.

在可靠性设计方法中, 考虑了材料性能、构件尺寸及结构的外来因素都是随机的几何量或物理量, 而不是确定的单值量. 这些随机变量通常用概率密度函数 $f(x)$ 和概率分布函数 $F(x)$ 来描述^[1,2].

在工程设计上, 常见的随机变量对应的概率密度函数为

材料强度: 正态或对数正态分布.

恒荷载: 正态分布.

持久活荷载: 极值 I 型或 Γ 分布.

短暂活荷载: 极值 I 型或 Γ 分布.

雪、风荷载: 极值 I 型分布.

地震荷载: 极值 II 型或极值 II 型分布.

几何尺寸: 对数正态分布.

工程结构可靠性设计是从结构的抗力大于或小于荷载效应而设计的. 可靠度(P)的定义为: 结构或构件在规定的时间内和规定的条件下完成预定功能的概率^[1,2]. 即

$$R = P(Z > 0),$$

其中 $Z = g(R, S) = R - S$ 称为功能函数, R 为结构抗力, S 为荷载效应.

也即是可靠度看作随机事件 $Z > 0$ 的概率.

2 结构可靠性模糊设计

2.1 模糊事件

结构的可靠性是反映了结构正常工作这一事件的随机性, 它把结构处于安全工作状态的界

收稿日期: 2002-10-22

作者简介: 刘三 (1965), 男, 讲师, 主要研究方向为模糊数学与神经网络在结构工程中的应用.

限明确化了,即认为 $Z > 0$ 时安全, $Z < 0$ 时失效. 而实际工程结构或构件中安全工作的界限一般是模糊的,主要表现在结构或构件正常工作准则的模糊性、荷载效应的模糊性、截面几何尺寸的模糊性以及其它模糊因素^[3,4]. 它们既具有随机性,又具有模糊性.

在工程设计中,最核心的问题是失效准则^[5]. 如在强度设计中,把构件的实际应力超过许用应力即认为失效或不安全. 如图 1 所示,在 σ_0 处一刀切,即当 $\sigma \leq \sigma_0$ 对安全的隶属度是 1,而当 $\sigma > \sigma_0$ 时,哪怕是超过 0.01% 就绝对不安全,这显然是不科学的. 其隶属函数为

$$\mu_v(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \leq \sigma_0); \\ 0 & (\sigma > \sigma_0). \end{cases}$$

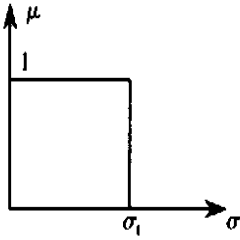


图 1 失效准则一刀切隶属函数

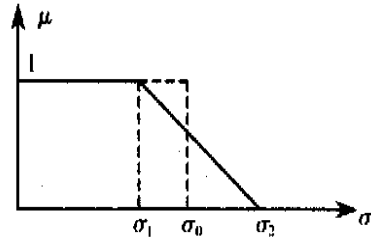


图 2 失效准则逐步过渡隶属函数

如图 2 所示,把这种一刀切改成逐步过渡,这就是模糊化的思想,至于直线过渡或曲线过渡没有本质的区别. 则其隶属函数为

$$\mu_v(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \leq \sigma_1); \\ 1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} & (\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2); \\ 0 & (\sigma > \sigma_0). \end{cases}$$

2.2 模糊随机可靠度

同样,结构或构件正常工作这一事件除具有随机性外,还具有模糊性,应把它看作模糊随机事件,其模糊随机可靠度为

$$R = P(Z).$$

根据模糊随机概率的定义有

$$R = P(Z) = \int_{\Omega} \mu_z(z) f(z) dz, \quad (1)$$

式中, Ω 为论域, $f(z)$ 为 Z 的概率密度函数, $\mu_z(z)$ 为随机变量 Z 对 Z 的隶属度.

式(1)就是结构或构件模糊随机可靠性的数学模型.

根据功能函数的特点, $\mu_z(z)$ 可以选用戒下型隶属函数来表示,这里采用一种最典型的升半梯形的表示形式,如图 3 所示,其隶属函数为

$$\mu_z(z) = \begin{cases} 1 & (z > a_2); \\ \frac{z - a_1}{a_2 - a_1} & (a_1 < z \leq a_2); \\ 0 & (z < a_1). \end{cases} \quad (2)$$

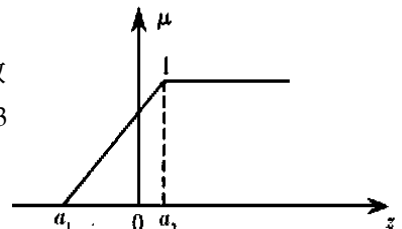


图 3 升半梯形隶属层数

当 $Z = R - S > a_2$ 时, 取 Z 对 Z 的隶属度 $\mu_z(z) = 1$, 当 $Z \leq a_1$ 时, 取 $\mu_z(z) = 0$, 当 $a_1 < Z \leq a_2$ 时, 有 $0 < \mu_z(z) < 1$.

这里概率密度函数 $f(z)$ 取为正态分布函数, 即式(3). 对于非正态分布函数可经过变换为等效正态分布函数:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\bar{z}}{\sigma}\right)^2}, \quad (3)$$

式中, $\bar{z}$ 为随机变量 Z 的均值, σ 为方差.

把式(2)和式(3)代入式(1)可得

$$R = P(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_z(z) f(z) dz = \left[\frac{\bar{z} - a_1}{a_2 - a_1} \Phi\left(\frac{\bar{z} - a_1}{\sigma}\right) - \left(\frac{a_2 - \bar{z}}{a_2 - a_1} \right) \Phi\left(\frac{a_2 - \bar{z}}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a_2 - a_1)} \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2 - \bar{z}}{\sigma}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{z} - a_1}{\sigma}\right)^2} \right] \right], \quad (4)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数, a_1 、 a_2 为分布常数, 依据具体情况选定.^[5]

在实际工程设计中, 通常认为 $Z > 0$ 时, 是安全的, $Z \leq a$ 时, 构件将失效, 而 $a < Z \leq 0$ 时, 则认为构件处于过渡状态, 此时有 $0 < \mu_z(z) < 1$, 如图4所示, 其隶属函数为

$$\mu_z(z) = \begin{cases} 1 & (z > 0); \\ 1 - \frac{z}{a} & (a < z \leq 0); \\ 0 & (z \leq a). \end{cases}$$

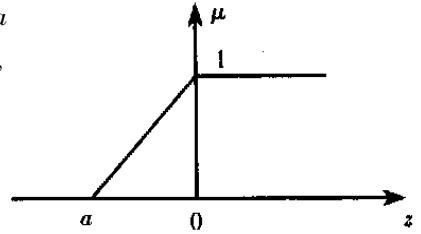


图4 安全准则隶属层数

上述情况与构件的实际工作状态是相符的. 于是式(4)

可进一步化简为

$$R = P(Z) = 1 - \left[1 - \frac{\bar{z}}{a} \right] \Phi\left(-\frac{\bar{z} - a}{\sigma}\right) - \left[\frac{\bar{z}}{a} \right] \Phi\left(\frac{\bar{z}}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a - \bar{z}}{\sigma}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{z}}{\sigma}\right)^2} \right], \quad (5)$$

式中, a 与问题的性质、材料性质等因素有关. 在实际设计中, 通常认为 $Z = R - S \leq 5\%$ 仍是可行方案, 在 $Z > 5\%$ 为不可行. 因此, 通常情况下可取 $a = -0.05R$ 作为过渡区的阈值^[6].

3 算例

例1 圆截面直杆承受轴向拉力 $P = 10t$. 已知材料的屈服极限和杆的直径 d 都符合正态分布, 均值和标准差分别为: $\bar{R} = 2900 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_R = 250 \text{ kg/cm}^2$; $\bar{d} = 3 \text{ cm}$ 和 $\sigma_d = 0.3 \text{ cm}$.

在本例中, P 为常量值, R 和 d 为随机变量.

用极限荷载表示的极限方程为

$$Z = \frac{\pi}{4} d^2 R - 10000,$$

则纯随机事件下的可靠度和可靠指标分别为

$$P(Z) = 0.990623, \beta = 2.352.$$

模糊随机事件下的可靠度和可靠指标分别为:

$$P(Z) = 0.998136, \beta = 2.901.$$

例2 简支木梁受均布荷载 Q (由恒荷载 D 和雪荷载 S 共同作用), 截面为矩形, 材料的失

效应力、均布荷载 Q 、截面宽度 b 和 h 分别为正态、极值 I 型、对数正态、对数正态分布, 它们的均值和变异系数分别为: $\bar{R} = 393.68 \text{ kg/cm}^2$, $V_R = 0.35$; $\bar{Q} = 11.16 \text{ kg/cm}$, $V_Q = 0.08$; $\bar{b} = 12.45 \text{ cm}$, $V_b = 0.05$, $\bar{h} = 25.65 \text{ cm}$, $V_h = 0.06$.

本例可根据材料力学许用应力法建立极限方程为

$$Z = R - 100335.3Q/bh^2,$$

则纯随机事件下的可靠度和可靠指标分别为

$$P(Z) = 0.96785, \beta = 1.8512.$$

模糊随机事件下的可靠度和可靠指标分别为

$$P(Z) = 0.97452, \beta = 1.953.$$

4 结论

从算例可以看出: 与纯随机事件下的情况相比, 考虑模糊性时结构或构件的可靠度都有一定程度的提高. 这说明结构正常工作状态一般情况下并不存在明确的界限, 从安全到失效是一个过渡状态, 结构可靠性模糊设计更能客观地反映结构的安全程度.

参考文献:

- [1] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 南京: 河海大学出版社, 1986.
- [2] 李国强. 工程结构荷载与可靠度设计原理[M]. 上海: 中国建筑工业出版社, 1999. 97–128.
- [3] 李洪兴. 工程模糊数学方法及应用[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1991. 169–177, 432–438, 567–572.
- [4] 王凡. 模糊数学与科学工程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨船舶工程学院出版社, 1988. 39–58.
- [5] 黄洪钟. 结构强度的模糊可靠性设计[A]. 刘增良主编. 模糊技术与应用选编(2)[C]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1997. 540–544.
- [6] 赵晓冬. 模糊思维与广义设计[M]. 北京: 机械出版社, 1998. 269–276.

Structured Reliability Design Based on Fuzzy Probability

LIU San-mao¹, YAO Ling-an²

(1. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510643, China;

2. Guanglian Estate Development Co. Ltd., Guangzhou 510656, China)

Abstract: In general, the material performance, element size and factors ab extra are regarded as random variables of structured reliability design. But the limit of safety work about actual engineering structure or element is fuzzy as well as random. It is more reasonable that it is regarded as fuzzy and random event, i. e. fuzzy and random reliability design.

Key words: random; fuzzy; reliability; function